Cálculo II - B – profs.: Heloisa Bauzer Medeiros e Denise de Oliveira Pinto
2^o semestre de 2017
Aula 5 Funções (continuação)

Conjuntos de Nível Nas aulas passadas falamos bastante sobre gráficos e parametrizações . Um segundo conceito importante é o de conjunto de nível. Vamos pensar no seguinte problema: suponha que você quer comer uma refeição com prato principal, sobremesa e bebida, em determinado restaurante. Você pode pensar nisso como uma função de um subconjunto de $\mathbb{R}^3 := \{(p,s,b),\ 0 < p < 300,\ 0 < s < 80,\ 0 < b < 800\}$, $valor(p,s,b) = p + s + b$. Agui, estamos imaginando que o prato principal mais caro custa $R\$300,00$, a sobremesa mais cara custa $R\$80,00$ e a bebida mais cara custa $R\$800,00$. Uma pergunta bastante natural é: quais são todas as combinações possíveis desses três elementos de modo a gastar exatamente $R\$200,00$? Em termos matemáticos estaremos pensando quais os pontos do domínio de f que têm 200 por imagem. Esse conjunto será chamado *conjunto de nível* 200 de f.

`Exemplo 1.` *Suponha que a precipitação de chuvas em determinada região depende das grandezas x,y e z de acordo com a expressão* $x^2 + 3y + z$. *Quais as condições conduzirão a uma precipitação de 50?*

`Exemplo 2.` *Suponha que você está organizando uma biblioteca e você quer classificar os livros de acordo com dois parâmetros: tipo (literatura, poesia, biografias, etc..) e idioma original da obra.Todos os livros com mesmo tipo e cujo idioma original seja o mesmo devem ficar na mesma estante. Podemos pensar em uma função que associa livros Ã estantes, de acordo com seu tipo e idioma. Mais uma vez, temos uma função de duas variáveis. Você pode olhar para a biblioteca organizada, escolher a terceira estante e verificar que ali estão todos os livros de poesia com autores de língua portuguesa. Este conjunto de livros será então o conjunto de* nível terceira estante *da função* .

`Exercício 1.` *Você quer comprar calça, camisa e sapato para ir a uma festa. Evidentemente sua despesa será a soma do preço destas três peças. Procure descrever uma função que explicita esta dependência. Determine todas as possibilidades que você terá com* $R\$400,00$. *Em outras palavras, determine o conjunto de nível* 400 *desta função .*

É fundamental entender aqui que um conjunto de nível é um subconjunto do domínio da função . Não é um suconjunto do gráfico. Formalmente, definimos:

Definição 0.1. *Dada uma função com domínio em* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *e contradomínio em* $\mathbb{R}$ *definimos o conjunto de nível* k *de* f *como sendo:* $\{X \in D, \ / f(X) = k\}$.

Note que esse é um conceito que só estamos definindo para funções com contradomínio real.

`Exemplo 3.` *Considere* $F(u, v) = 2u + v, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2$.*Vamos determinar o conjunto de nível* 1 *desta função . Isto é: todos os pontos do domínio de* F *cuja imagem da* 1. *Queremos, assim, determinar todos os valores de* u *e* v *tais que* $2u + v = 1$. *Observe que isso é uma reta que poderia ser descrita pela equação* $v = 1 - 2u$.*Ou seja, coeficiente angular* -2 *contendo o ponto* $(0, 1)$. **é muito importante que você se convença que esta reta não é o gráfico desta função** . Esta reta é gráfico da função $g(x) = 1 - 2x$ que é uma função completamente diferente. Neste exemplo o gráfico de F é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e é representado por um plano !!!

`Exercício 2.` *determine o conjunto de nível* k *de cada uma das funções . Em cada caso, procure pensar também no gráfico da função e (eu imploro) convença-se de que são conjuntos com-ple-ta-men-te diferentes.*

a) $F(u, v) = 3u + v, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, \ k = 2$;

b) $F(u, v) = u^2, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, \ k = 9$;

c) $F(u, v) = u^2 + v^2, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, k = 4$;

d) $F(u, v) = sen uv, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, k = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

e)$F(x, y, z, w) = e^{x+y+v+w}$

c) $F(u, v) = uv, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, k = 1$;

f) $F(u, v) = u^2 + v^2, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, k = 4$;

g) $F(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2, \ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, k = 4$;

h) $F(u, v, w) = u + v + w, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, k = -1$;

Até agora, trabalhamso com vários conjuntos associados à descrição de funções .Em especial, mencionamos gráficos, conjuntos de nível e parametrizações . Note que um mesmo conjunto pode ser descrito como gráfico ou como conjunto de nível ou por uma parametrização .

Definição 0.2. *Dizemos que um conjunto A é explicitamente definido por uma função f se A é gráfico de f.*
Dizemos que um conjunto A é parametricamente definido por uma função g se A é imagem de g.
Dizemos que A é implicitamente definido por uma função h se A é conjunto de nível de h.

`Exemplo 4.` *A função $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ define explicitamente uma parábola. A mesma parábola pode ser parametrizada por $g(t) = (t, t^2)$ e pode ser implicitamente definida por $h(x, y) = y - x^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Problemas para sala de aula

`Exercício 3.` *Em cada uma das afirmaçẽs a seguir, responda se é falsa ou verdadeira e justifique sua resposta.*

(a) *O gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é um círculo.*

(b) *As imagens de $g(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $h(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ são iguais.*

(c) *Se o conjunto de nível k de f é o igual ao conjunto de nível k de g para todo k em $\mathbb{R}$, então f e g são iguais.*

(d) *Se os conjuntos de nível de f são iguais aos conjuntos de nível de g, então, $f = g$.*

(e) *A imagem de $f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x, y), \in \mathbb{R}^2$, é um cilindro em $\mathbb{R}^3$.*

(f) *O gráfico de $g(t) = (t^2, cost)$ é uma superfície de $\mathbb{R}^3$.*

`Exercício 4.` *Parametrize os gráficos de $f(x) = sen\ (x^2 - x),\ x \in [0, \infty$. Encontre uma definição implícita para o mesmo conjunto.*

`Exercício 5.` *Parametrize o gráfico de $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2,\ (x, y) \in$ $mathbbR^2$. Encontre uma definição implícita para o mesmo conjunto.*

Exercício 6. *a) Descreva e (se possível) esboce o gráfico de* $f(x, y) = sen(y)$.

b)Descreva e (se possível) esboce os conjuntos de nível de $f(x, y, z) = y^2 + z^2$.

Para sistematizar o que foi discutido até esse momento,escreva, de forma organizada, como se você fosse publicar isso para ensinar a alguém, em alguns parágrafos:

- Defina funções vetoriais de várias variáveis e dê alguns exemplos.
- Explique o que é um gráfico, um conjunto de nível e uma parametrização . Dê exemplos e faça alguns esboços. Tente explicitar quando houver uma curva ou superfície.
- Faça considerações sobre as seguintes questões:
  - Se um conjunto tem definição explícita, é sempre possível encontrar uma definição implícita e/ou paramétrica?
  - Se um conjunto pode ser parametrizado, ele pode sempre ser definido implicitamente? explicitamente?
  - SE um conjunto tem definição implícita, ele pode ser parametrizado? Ele é gráfico de alguma função ?
  - É possível parametrizar o mesmo conjunto de muitas maneiras?
  - A definição implícita/explícita de um conjunto é única?

Essa última parte é um resumo do que foi estudado até agora. É difícil de ser feita. Tente fazer o melhor possível, entendendo bem, discutindo com seus colegas e professor. Provavelmente vai demorar alguns dias para ficar bom. Mas é o resumo que você deve guardar e sempre reler, quando tiver dúvidas.